

Metodi Quantitativi per le Applicazioni Finanziarie

Master in Corporate Finance & Investment Banking

Rodolfo Vanzini

Exponential s.r.l. per MIP-Borsa Italiana

14-16 aprile 2008

- 1 Elementi di calcolo numerico
 - Valori approssimati: errori e loro propagazione
 - Risoluzione approssimata di funzioni
 - Markowitz: il modello media-varianza
- 2 Asset pricing e modello di Black-Scholes
 - Proprietà e ipotesi dell'asset pricing
 - Cox-Ross-Rubinstein e simulazioni Montecarlo
 - Il modello di Black-Scholes
- 3 "Greche" e tecniche di copertura
 - Delta e delta hedging
 - Theta, gamma e loro relazione con delta
 - Vega e rho
- 4 Early exercise e le opzioni americane
 - Early exercise su non-dividend options
 - L'effetto dei dividendi
 - Opzioni americane: approssimazione analitica

- 1 Elementi di calcolo numerico
 - Valori approssimati: errori e loro propagazione
 - Risoluzione approssimata di funzioni
 - Markowitz: il modello media-varianza
- 2 Asset pricing e modello di Black-Scholes
 - Proprietà e ipotesi dell'asset pricing
 - Cox-Ross-Rubinstein e simulazioni Montecarlo
 - Il modello di Black-Scholes
- 3 "Greche" e tecniche di copertura
 - Delta e delta hedging
 - Theta, gamma e loro relazione con delta
 - Vega e rho
- 4 Early exercise e le opzioni americane
 - Early exercise su non-dividend options
 - L'effetto dei dividendi
 - Opzioni americane: approssimazione analitica

Addizione di numeri approssimati

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1 \quad ; \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2$$

$$a_1 + a_2 \leq x_1 + x_2 \leq b_1 + b_2$$

$$|\Delta x_1| = |b_1 - a_1| \quad ; \quad |\Delta x_2| = |b_2 - a_2|$$

$$y = x_1 + x_2$$

$$|\Delta y| \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$$

L'errore massimo assoluto di una somma di numeri approssimati non supera la somma degli errori massimi assoluti degli addendi.

Addizione di numeri approssimati

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1 \quad ; \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2$$

$$a_1 + a_2 \leq x_1 + x_2 \leq b_1 + b_2$$

$$|\Delta x_1| = |b_1 - a_1| \quad ; \quad |\Delta x_2| = |b_2 - a_2|$$

$$y = x_1 + x_2$$

$$|\Delta y| \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$$

L'errore massimo assoluto di una somma di numeri approssimati non supera la somma degli errori massimi assoluti degli addendi.

Addizione di numeri approssimati

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1 \quad ; \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2$$

$$a_1 + a_2 \leq x_1 + x_2 \leq b_1 + b_2$$

$$|\Delta x_1| = |b_1 - a_1| \quad ; \quad |\Delta x_2| = |b_2 - a_2|$$

$$y = x_1 + x_2$$

$$|\Delta y| \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$$

L'errore massimo assoluto di una somma di numeri approssimati non supera la somma degli errori massimi assoluti degli addendi.

Addizione di numeri approssimati

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1 \quad ; \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2$$

$$a_1 + a_2 \leq x_1 + x_2 \leq b_1 + b_2$$

$$|\Delta x_1| = |b_1 - a_1| \quad ; \quad |\Delta x_2| = |b_2 - a_2|$$

$$y = x_1 + x_2$$

$$|\Delta y| \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$$

L'errore massimo assoluto di una somma di numeri approssimati non supera la somma degli errori massimi assoluti degli addendi.

Addizione di numeri approssimati

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1 \quad ; \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2$$

$$a_1 + a_2 \leq x_1 + x_2 \leq b_1 + b_2$$

$$|\Delta x_1| = |b_1 - a_1| \quad ; \quad |\Delta x_2| = |b_2 - a_2|$$

$$y = x_1 + x_2$$

$$|\Delta y| \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$$

L'errore massimo assoluto di una somma di numeri approssimati non supera la somma degli errori massimi assoluti degli addendi.

Moltiplicazione di numeri approssimati

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1 \quad ; \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2$$

$$a_1 a_2 \leq x_1 x_2 \leq b_1 b_2$$

$$y = x_1 x_2$$

$$|\Delta y| = x_1 |\Delta x_2| + x_2 |\Delta x_1|$$

$$\delta = \left| \frac{\Delta y}{y} \right| = \left| \frac{x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2}{x_1 x_2} \right| \leq \left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2} \right|$$

L'errore relativo del prodotto non supera la somma degli errori relativi dei fattori.

Moltiplicazione di numeri approssimati

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1 \quad ; \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2$$

$$a_1 a_2 \leq x_1 x_2 \leq b_1 b_2$$

$$y = x_1 x_2$$

$$|\Delta y| = x_1 |\Delta x_2| + x_2 |\Delta x_1|$$

$$\delta = \left| \frac{\Delta y}{y} \right| = \left| \frac{x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2}{x_1 x_2} \right| \leq \left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2} \right|$$

L'errore relativo del prodotto non supera la somma degli errori relativi dei fattori.

Moltiplicazione di numeri approssimati

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1 \quad ; \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2$$

$$a_1 a_2 \leq x_1 x_2 \leq b_1 b_2$$

$$y = x_1 x_2$$

$$|\Delta y| = x_1 |\Delta x_2| + x_2 |\Delta x_1|$$

$$\delta = \left| \frac{\Delta y}{y} \right| = \left| \frac{x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2}{x_1 x_2} \right| \leq \left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2} \right|$$

L'errore relativo del prodotto non supera la somma degli errori relativi dei fattori.

Moltiplicazione di numeri approssimati

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1 \quad ; \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2$$

$$a_1 a_2 \leq x_1 x_2 \leq b_1 b_2$$

$$y = x_1 x_2$$

$$|\Delta y| = x_1 |\Delta x_2| + x_2 |\Delta x_1|$$

$$\delta = \left| \frac{\Delta y}{y} \right| = \left| \frac{x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2}{x_1 x_2} \right| \leq \left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2} \right|$$

L'errore relativo del prodotto non supera la somma degli errori relativi dei fattori.

Moltiplicazione di numeri approssimati

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1 \quad ; \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2$$

$$a_1 a_2 \leq x_1 x_2 \leq b_1 b_2$$

$$y = x_1 x_2$$

$$|\Delta y| = x_1 |\Delta x_2| + x_2 |\Delta x_1|$$

$$\delta = \left| \frac{\Delta y}{y} \right| = \left| \frac{x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2}{x_1 x_2} \right| \leq \left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2} \right|$$

L'errore relativo del prodotto non supera la somma degli errori relativi dei fattori.

Moltiplicazione di numeri approssimati

$$a_1 \leq x_1 \leq b_1 \quad ; \quad a_2 \leq x_2 \leq b_2$$

$$a_1 a_2 \leq x_1 x_2 \leq b_1 b_2$$

$$y = x_1 x_2$$

$$|\Delta y| = x_1 |\Delta x_2| + x_2 |\Delta x_1|$$

$$\delta = \left| \frac{\Delta y}{y} \right| = \left| \frac{x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2}{x_1 x_2} \right| \leq \left| \frac{\Delta x_1}{x_1} \right| + \left| \frac{\Delta x_2}{x_2} \right|$$

L'errore relativo del prodotto non supera la somma degli errori relativi dei fattori.

Esempio: calcolo dell'area

$$\text{base} = \text{cm } (10,84 \pm 0,01) \quad |\Delta b| = 0,02 \quad \left| \frac{\Delta b}{b} \right| = 0,001848$$

$$\text{altezza} = \text{cm } (6,32 \pm 0,005) \quad |\Delta a| = 0,01 \quad \left| \frac{\Delta a}{a} \right| = 0,001582$$

$$\text{area} = \text{cm}^2 \quad A = ba$$

$$|\Delta A| \leq 6,32 \cdot 0,02 + 10,84 \cdot 0,01 = 0,2348 < 0,24 \quad A = (68,50 \pm 0,24) \text{ cm}^2$$

$$\delta = \left| \frac{\Delta A}{A} \right| \leq \frac{0,2348}{68,50} = 0,003428 < (0,001848 + 0,001582) = 0,00343$$

Esempio: calcolo dell'area

$$\text{base} = \text{cm } (10,84 \pm 0,01) \quad |\Delta b| = 0,02 \quad \left| \frac{\Delta b}{b} \right| = 0,001848$$

$$\text{altezza} = \text{cm } (6,32 \pm 0,005) \quad |\Delta a| = 0,01 \quad \left| \frac{\Delta a}{a} \right| = 0,001582$$

$$\text{area} = \text{cm}^2 \quad A = ba$$

$$|\Delta A| \leq 6,32 \cdot 0,02 + 10,84 \cdot 0,01 = 0,2348 < 0,24 \quad A = (68,50 \pm 0,24) \text{cm}^2$$

$$\delta = \left| \frac{\Delta A}{A} \right| \leq \frac{0,2348}{68,50} = 0,003428 < (0,001848 + 0,001582) = 0,00343$$

Esempio: calcolo dell'area

$$\text{base} = \text{cm } (10,84 \pm 0,01) \quad |\Delta b| = 0,02 \quad \left| \frac{\Delta b}{b} \right| = 0,001848$$

$$\text{altezza} = \text{cm } (6,32 \pm 0,005) \quad |\Delta a| = 0,01 \quad \left| \frac{\Delta a}{a} \right| = 0,001582$$

$$\text{area} = \text{cm}^2 \quad A = ba$$

$$|\Delta A| \leq 6,32 \cdot 0,02 + 10,84 \cdot 0,01 = 0,2348 < 0,24 \quad A = (68,50 \pm 0,24) \text{ cm}^2$$

$$\delta = \left| \frac{\Delta A}{A} \right| \leq \frac{0,2348}{68,50} = 0,003428 < (0,001848 + 0,001582) = 0,00343$$

Metodo delle tangenti (o di Newton)

In un intervallo $[a, b]$ si sostituisce alla curva la tangente in uno dei due estremi e si assume come valore approssimato della radice l'ascissa x_0 del punto in cui la tangente interseca l'asse delle x internamente all'intervallo $[a, b]$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1)$$

Fissato il grado di approssimazione ϵ si procede fintanto che:

$$|x_{n+1} - x_n| < \epsilon \quad (2)$$

Esempio: $x^3 - 2x - 2 = 0$

Per risolvere con il metodo di Newton l'equazione $x^3 - 2x - 2 = 0$ si procede, ad esempio, nel modo seguente:

- $A(1, -3)$ e $B(2,2)$
- $f'(x) = 3x^2 - 2$ e $f''(x) = 6x$;
- nell'intervallo $[1,2]$ sia $f'(x)$ sia $f''(x)$ sono > 0 ;
- applicando la (1) e la (2) si ricava:

$$\begin{aligned}x_0 &= 1,8 & f(x_0) &= 0,232 \\x_1 &= 1,769949 & f(x_1) &= 0,004848 \\x_2 &= 1,769293 & f(x_2) &= 0,000005\end{aligned}$$

Perciò la radice della funzione è $\alpha = 1,7692$ approssimata per eccesso a meno di 10^{-4} .

Esempio: $x^3 - 2x - 2 = 0$

Per risolvere con il metodo di Newton l'equazione $x^3 - 2x - 2 = 0$ si procede, ad esempio, nel modo seguente:

- $A(1, -3)$ e $B(2,2)$
- $f'(x) = 3x^2 - 2$ e $f''(x) = 6x$;
- nell'intervallo $[1,2]$ sia $f'(x)$ sia $f''(x)$ sono > 0 ;
- applicando la (1) e la (2) si ricava:

$$\begin{aligned}x_0 &= 1,8 & f(x_0) &= 0,232 \\x_1 &= 1,769949 & f(x_1) &= 0,004848 \\x_2 &= 1,769293 & f(x_2) &= 0,000005\end{aligned}$$

Perciò la radice della funzione è $\alpha = 1,7692$ approssimata per eccesso a meno di 10^{-4} .

Esempio: $x^3 - 2x - 2 = 0$

Per risolvere con il metodo di Newton l'equazione $x^3 - 2x - 2 = 0$ si procede, ad esempio, nel modo seguente:

- $A(1, -3)$ e $B(2,2)$
- $f'(x) = 3x^2 - 2$ e $f''(x) = 6x$;
- nell'intervallo $[1,2]$ sia $f'(x)$ sia $f''(x)$ sono > 0 ;
- applicando la (1) e la (2) si ricava:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1,8 & f(x_0) = 0,232 \\ x_1 = 1,769949 & f(x_1) = 0,004848 \\ x_2 = 1,769293 & f(x_2) = 0,000005 \end{array}$$

Perciò la radice della funzione è $\alpha = 1,7692$ approssimata per eccesso a meno di 10^{-4} .

Esempio: $x^3 - 2x - 2 = 0$

Per risolvere con il metodo di Newton l'equazione $x^3 - 2x - 2 = 0$ si procede, ad esempio, nel modo seguente:

- $A(1, -3)$ e $B(2,2)$
- $f'(x) = 3x^2 - 2$ e $f''(x) = 6x$;
- nell'intervallo $[1,2]$ sia $f'(x)$ sia $f''(x)$ sono > 0 ;
- applicando la (1) e la (2) si ricava:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1,8 & f(x_0) = 0,232 \\ x_1 = 1,769949 & f(x_1) = 0,004848 \\ x_2 = 1,769293 & f(x_2) = 0,000005 \end{array}$$

Perciò la radice della funzione è $\alpha = 1,7692$ approssimata per eccesso a meno di 10^{-4} .

Esempio: $x^3 - 2x - 2 = 0$

Per risolvere con il metodo di Newton l'equazione $x^3 - 2x - 2 = 0$ si procede, ad esempio, nel modo seguente:

- $A(1, -3)$ e $B(2,2)$
- $f'(x) = 3x^2 - 2$ e $f''(x) = 6x$;
- nell'intervallo $[1,2]$ sia $f'(x)$ sia $f''(x)$ sono > 0 ;
- applicando la (1) e la (2) si ricava:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1,8 & f(x_0) = 0,232 \\ x_1 = 1,769949 & f(x_1) = 0,004848 \\ x_2 = 1,769293 & f(x_2) = 0,000005 \end{array}$$

Perciò la radice della funzione è $\alpha = 1,7692$ approssimata per eccesso a meno di 10^{-4} .

Esempio: $x^3 - 2x - 2 = 0$

Per risolvere con il metodo di Newton l'equazione $x^3 - 2x - 2 = 0$ si procede, ad esempio, nel modo seguente:

- $A(1, -3)$ e $B(2,2)$
- $f'(x) = 3x^2 - 2$ e $f''(x) = 6x$;
- nell'intervallo $[1,2]$ sia $f'(x)$ sia $f''(x)$ sono > 0 ;
- applicando la (1) e la (2) si ricava:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1,8 & f(x_0) = 0,232 \\ x_1 = 1,769949 & f(x_1) = 0,004848 \\ x_2 = 1,769293 & f(x_2) = 0,000005 \end{array}$$

Perciò la radice della funzione è $\alpha = 1,7692$ approssimata per eccesso a meno di 10^{-4} .

Esempio: $x^3 - 2x - 2 = 0$

Per risolvere con il metodo di Newton l'equazione $x^3 - 2x - 2 = 0$ si procede, ad esempio, nel modo seguente:

- $A(1, -3)$ e $B(2,2)$
- $f'(x) = 3x^2 - 2$ e $f''(x) = 6x$;
- nell'intervallo $[1,2]$ sia $f'(x)$ sia $f''(x)$ sono > 0 ;
- applicando la (1) e la (2) si ricava:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1,8 & f(x_0) = 0,232 \\ x_1 = 1,769949 & f(x_1) = 0,004848 \\ x_2 = 1,769293 & f(x_2) = 0,000005 \end{array}$$

Perciò la radice della funzione è $\alpha = 1,7692$ approssimata per eccesso a meno di 10^{-4} .

Esempio: $x^3 - 2x - 2 = 0$

Per risolvere con il metodo di Newton l'equazione $x^3 - 2x - 2 = 0$ si procede, ad esempio, nel modo seguente:

- $A(1, -3)$ e $B(2,2)$
- $f'(x) = 3x^2 - 2$ e $f''(x) = 6x$;
- nell'intervallo $[1,2]$ sia $f'(x)$ sia $f''(x)$ sono > 0 ;
- applicando la (1) e la (2) si ricava:

$$\begin{aligned}x_0 &= 1,8 & f(x_0) &= 0,232 \\x_1 &= 1,769949 & f(x_1) &= 0,004848 \\x_2 &= 1,769293 & f(x_2) &= 0,000005\end{aligned}$$

Perciò la radice della funzione è $\alpha = 1,7692$ approssimata per eccesso a meno di 10^{-4} .

Esempio: $x^3 - 2x - 2 = 0$

Per risolvere con il metodo di Newton l'equazione $x^3 - 2x - 2 = 0$ si procede, ad esempio, nel modo seguente:

- $A(1, -3)$ e $B(2,2)$
- $f'(x) = 3x^2 - 2$ e $f''(x) = 6x$;
- nell'intervallo $[1,2]$ sia $f'(x)$ sia $f''(x)$ sono > 0 ;
- applicando la (1) e la (2) si ricava:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1,8 & f(x_0) = 0,232 \\ x_1 = 1,769949 & f(x_1) = 0,004848 \\ x_2 = 1,769293 & f(x_2) = 0,000005 \end{array}$$

Perciò la radice della funzione è $\alpha = 1,7692$ approssimata per eccesso a meno di 10^{-4} .

Esempio: $x^3 - 2x - 2 = 0$

Per risolvere con il metodo di Newton l'equazione $x^3 - 2x - 2 = 0$ si procede, ad esempio, nel modo seguente:

- $A(1, -3)$ e $B(2,2)$
- $f'(x) = 3x^2 - 2$ e $f''(x) = 6x$;
- nell'intervallo $[1,2]$ sia $f'(x)$ sia $f''(x)$ sono > 0 ;
- applicando la (1) e la (2) si ricava:

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1,8 & f(x_0) = 0,232 \\ x_1 = 1,769949 & f(x_1) = 0,004848 \\ x_2 = 1,769293 & f(x_2) = 0,000005 \end{array}$$

Perciò la radice della funzione è $\alpha = 1,7692$ approssimata per eccesso a meno di 10^{-4} .

La propagazione dell'errore nell'uso del PC

$$\text{succ.} = \begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_i = 4 \cdot u_{i-1} - 1 & \text{per } i = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

E' facile osservare che questa successione è costante con valore sempre $\frac{1}{3}$ per qualunque valore di i .

Facendo eseguire il calcolo al calcolatore è facile verificare che la successione non converge ...

La propagazione dell'errore nell'uso del PC

$$\text{succ.} = \begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_i = 4 \cdot u_{i-1} - 1 & \text{per } i = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

E' facile osservare che questa successione è costante con valore sempre $\frac{1}{3}$ per qualunque valore di i .

Facendo eseguire il calcolo al calcolatore è facile verificare che la successione non converge ...

La propagazione dell'errore nell'uso del PC

$$\text{succ.} = \begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_i = 4 \cdot u_{i-1} - 1 & \text{per } i = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

E' facile osservare che questa successione è costante con valore sempre $\frac{1}{3}$ per qualunque valore di i .

Facendo eseguire il calcolo al calcolatore è facile verificare che la successione non converge ...

IBM R51, Intel Centrino e Windows XP

Il listato di codice VBA:

```
Sub prova()  
Dim i As Double  
Dim j As Integer  
i = 1 / 3  
Range("A1:A1000").ClearContents  
For j = 1 To 30  
i = 4 * i - 1  
Range("A" & j).Value = i  
Next j  
End Sub
```

Attenzione all'output

0,3333333333333330	0,3333332538604740
0,3333333333333330	0,3333330154418950
0,3333333333333320	0,3333320617675780
0,3333333333333290	0,3333282470703120
0,3333333333333140	0,3333129882812500
0,3333333333332580	0,3332519531250000
0,3333333333330300	0,3330078125000000
0,3333333333321210	0,3320312500000000
0,33333333333284830	0,3281250000000000
0,33333333333139310	0,3125000000000000
0,33333333332557230	0,2500000000000000
0,33333333330228920	0,0000000000000000
0,3333333320915700	-1,0000000000000000
0,3333333283662800	-5,0000000000000000
0,3333333134651180	-21,0000000000000000

Tabella: La successione divergente

Applicazione: il calcolo del TIR

Il calcolo del tasso interno di rendimento (TIR) su Excel è effettuato da una procedura iterativa che segue il metodo di Newton.

- 1 Il confronto di alternative di investimento per un'impresa ($=\text{TIR.X}()$, $=\text{TIR.COST}()$); Calcolate il TIR di un'alternativa di investimento in cui un'impresa al tempo $t = 0$ investe 13 mln di euro in una nuova business unit prevedendo flussi in entrata per i prossimi 5 anni pari a 875 mila euro e un valore finale della business unit pari a 11 mln di euro.
- 2 Il calcolo del rendimento effettivo di un'obbligazione ($=\text{RENDIMENTO.PRIMO.IRR}()$); calcolate il rendimento effettivo di un'obbligazione che quota a 104, con cedola annua al 5%, scadente il 1/1/2012 e con rimborso alla pari (100).

- 1 Elementi di calcolo numerico
 - Valori approssimati: errori e loro propagazione
 - Risoluzione approssimata di funzioni
 - Markowitz: il modello media-varianza
- 2 Asset pricing e modello di Black-Scholes
 - Proprietà e ipotesi dell'asset pricing
 - Cox-Ross-Rubinstein e simulazioni Montecarlo
 - Il modello di Black-Scholes
- 3 "Greche" e tecniche di copertura
 - Delta e delta hedging
 - Theta, gamma e loro relazione con delta
 - Vega e rho
- 4 Early exercise e le opzioni americane
 - Early exercise su non-dividend options
 - L'effetto dei dividendi
 - Opzioni americane: approssimazione analitica

La varianza

Usando un campione di dati storici circa la performance di un'attività finanziaria il rischio viene misurato come dispersione rispetto alla media:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n - 1} \quad (3)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n - 1}} \quad (4)$$

Dove r_i e \bar{r} sono rispettivamente il rendimenti i -esimo e la media (o valore atteso) dei rendimenti. [n viene usato per calcolare la varianza della popolazione mentre $n - 1$ quella campionaria.]

La varianza

Usando un campione di dati storici circa la performance di un'attività finanziaria il rischio viene misurato come dispersione rispetto alla media:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n - 1} \quad (3)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n - 1}} \quad (4)$$

Dove r_i e \bar{r} sono rispettivamente il rendimenti i -esimo e la media (o valore atteso) dei rendimenti. [n viene usato per calcolare la varianza della popolazione mentre $n - 1$ quella campionaria.]

La varianza

Usando un campione di dati storici circa la performance di un'attività finanziaria il rischio viene misurato come dispersione rispetto alla media:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n - 1} \quad (3)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n - 1}} \quad (4)$$

Dove r_i e \bar{r} sono rispettivamente il rendimenti i -esimo e la media (o valore atteso) dei rendimenti. [n viene usato per calcolare la varianza della popolazione mentre $n - 1$ quella campionaria.]

La varianza

Usando un campione di dati storici circa la performance di un'attività finanziaria il rischio viene misurato come dispersione rispetto alla media:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n - 1} \quad (3)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2}{n - 1}} \quad (4)$$

Dove r_i e \bar{r} sono rispettivamente il rendimenti i -esimo e la media (o valore atteso) dei rendimenti. [n viene usato per calcolare la varianza della popolazione mentre $n - 1$ quella campionaria.]

La distribuzione effettiva delle performance

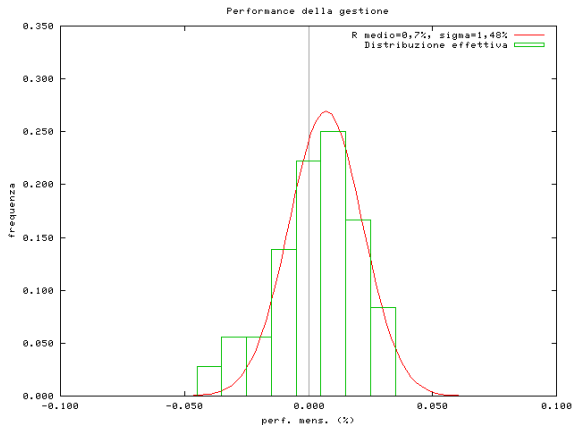


Figura: Le distribuzioni di *performance*: effettiva e normale

La distribuzione normale

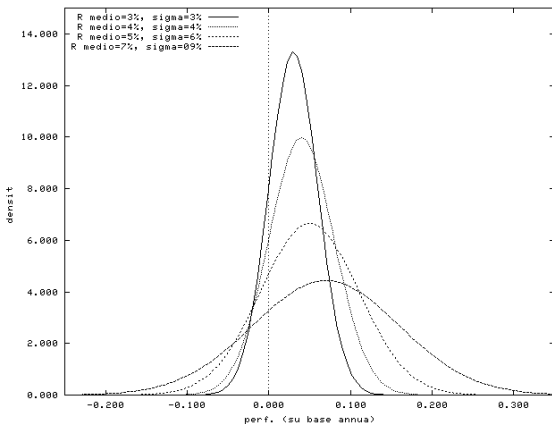


Figura: La distribuzione normale

Proprietà della distribuzione normale

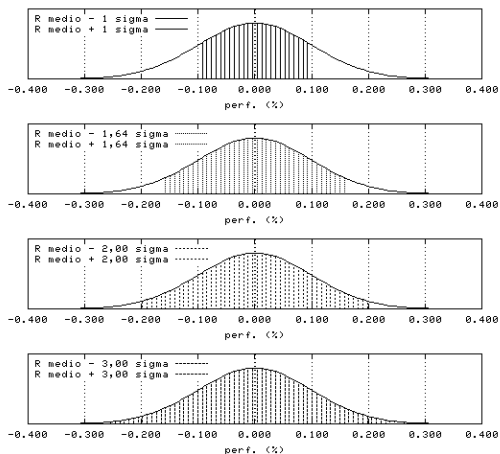


Figura: Gli intervalli di confidenza nella distribuzione normale. Un intervallo di ampiezza pari a $\mu \pm z$ con $z = [1,00; 1,64; 2,00; 3,00]$ contiene una probabilità

La volatilità come misura del rischio

Il rischio di un portafoglio d'investimento misurato dalla varianza, composto da due attività finanziarie e dato dalla seguente formula:

$$\sigma_{ptf}^2 = (w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2)^2 = w_1^2\sigma_1^2 + 2w_1w_2\sigma_{1,2} + w_2^2\sigma_2^2 \quad (5)$$

nel caso in cui la correlazione tra le due attività finanziarie ($\rho_{1,2} = \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_1\sigma_2}$) sia:

- $\rho = 1$ allora la volatilità del portafoglio è pari alla media ponderata per i pesi
- $\rho = -1$ allora la volatilità del portafoglio è pari alla differenza delle volatilità ponderata per i rispettivi pesi

Titolo	dev. st. (su base annua)	Titolo	dev.st
RCS MEDIAGROUP	36,0419	MEDIOLANUM	20,7067
FIAT	35,0472	LUXOTTICA	20,3543
TISCALI	29,7014	FINMECCANICA	20,1525
STMICROELECTRONICS	26,8303	SAIPEM	19,9549
FASTWEB	25,5058	MEDIASET	19,5221
MEDIOBANCA	24,8215	TELECOM ITALIA	19,4790
MONTE DEI PASCHI	24,7882	EDISON	19,3398
CAPITALIA	23,9640	AUTOGRILL	18,7875
SEAT PAGINE GIALLE	23,8190	TERNA	18,6439
TELECOM ITALIA MOBILE	23,1450	PIRELLI	18,5682
BANCA NAZ.LAVORO	22,8717	RAS	18,5092
GRUPPO EDIT.L'ESPRESSO	22,5402	SAN PAOLO IMI	18,3053
BANCA ANTON.	22,4519	BCA.PPO.DI VR NO	17,8651
BULGARI	22,2845	ALLEANZA	17,4357
BANCA PPO. MILANO	22,0078	MONDADORI ED	16,3689
ITALCEMENTI	21,9427	ENI	14,5015
AUTOSTRADE	21,8516	BANCHE PPO. UNITE	14,1690
BANCA FIDEURAM	21,7052	SNAM RETE GAS	13,8124
BANCA INTESA	21,5668	ENEL	13,5849
UNICREDITO ITALIANO	20,7362	GENERALI	12,6824
		S&P MIB INDEX	10,3729

Tabella: *Il significato quantitativo della diversificazione.* La volatilità dell'indice S&P/Mib, non solo è inferiore alla media delle volatilità dei titoli componenti l'indice (circa il 22%), ma è anche inferiore a quella del titolo a volatilità

Titolo	dev. st. (su base annua)	Titolo	dev.st
RCS MEDIAGROUP	36,0419	MEDIOLANUM	20,7067
FIAT	35,0472	LUXOTTICA	20,3543
TISCALI	29,7014	FINMECCANICA	20,1525
STMICROELECTRONICS	26,8303	SAIPEM	19,9549
FASTWEB	25,5058	MEDIASET	19,5221
MEDIOBANCA	24,8215	TELECOM ITALIA	19,4790
MONTE DEI PASCHI	24,7882	EDISON	19,3398
CAPITALIA	23,9640	AUTOGRILL	18,7875
SEAT PAGINE GIALLE	23,8190	TERNA	18,6439
TELECOM ITALIA MOBILE	23,1450	PIRELLI	18,5682
BANCA NAZ.LAVORO	22,8717	RAS	18,5092
GRUPPO EDIT.L'ESPRESSO	22,5402	SAN PAOLO IMI	18,3053
BANCA ANTON.	22,4519	BCA.PPO.DI VR NO	17,8651
BULGARI	22,2845	ALLEANZA	17,4357
BANCA PPO. MILANO	22,0078	MONDADORI ED	16,3689
ITALCEMENTI	21,9427	ENI	14,5015
AUTOSTRAD	21,8516	BANCHE PPO. UNITE	14,1690
BANCA FIDEURAM	21,7052	SNAM RETE GAS	13,8124
BANCA INTESA	21,5668	ENEL	13,5849
UNICREDITO ITALIANO	20,7362	GENERALI	12,6824
		S&P MIB INDEX	10,3729

Tabella: *Il significato quantitativo della diversificazione.* La volatilità dell'indice S&P/Mib, non solo è inferiore alla media delle volatilità dei titoli componenti l'indice (circa il 22%), ma è anche inferiore a quella del titolo a volatilità

La correlazione tra classi di attività finanziarie

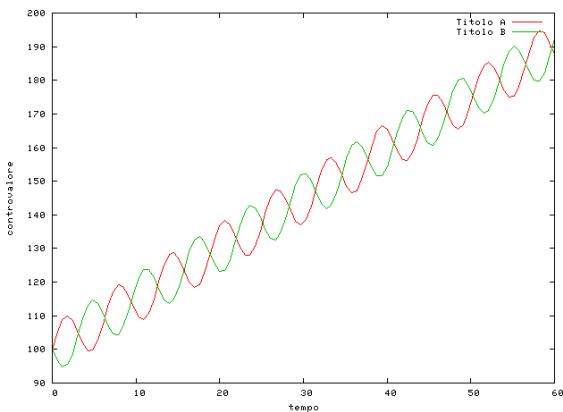


Figura: La diversificazione: il titolo A e il titolo B hanno lo stesso rendimento e la stessa volatilità attesi

La correlazione tra classi di attività finanziarie

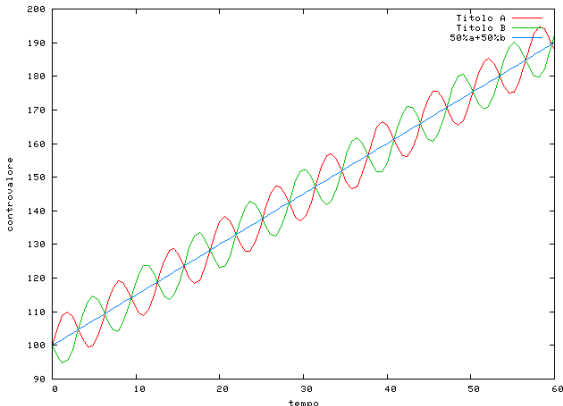
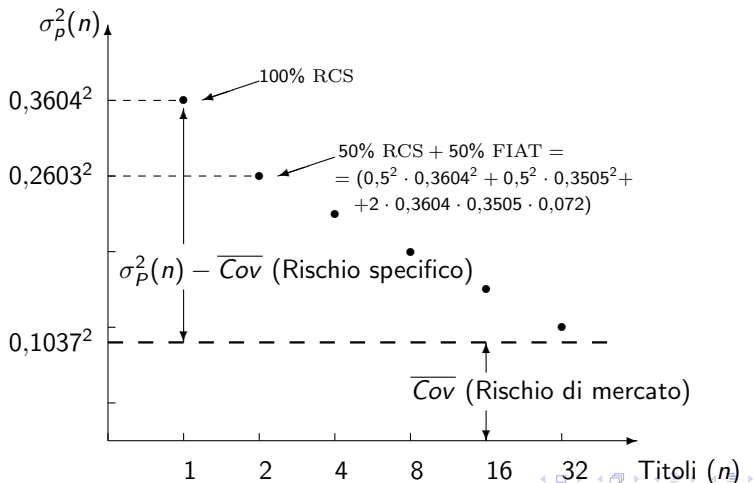


Figura: *Il beneficio della diversificazione.*

La matrice di correlazione (parte)

	ALL	AGL	AST	AVN	FID	INT	MPS	BNL	BPM	BPU	PVN	BLG	CF	
ALL	1,000													
AGL	0,382	1,000												
AST	0,241	0,198	1,000											
AVN	0,196	0,293	0,198	1,000										
FID	0,222	0,363	0,418	0,131	1,000									
INT	0,079	0,273	0,358	-0,224	0,268	1,000								
MPS	0,171	0,177	0,209	0,083	0,410	0,180	1,000							
BNL	-0,019	0,126	0,129	0,180	0,091	0,261	0,000	1,000						
BPM	0,040	0,159	0,218	0,124	0,267	0,402	0,137	0,298	1,000					
BPU	0,170	0,279	0,271	0,203	0,450	0,330	0,263	0,313	0,446	1,000				
BVN	0,333	0,194	0,333	0,118	0,387	0,386	0,468	0,188	0,464	0,569	1,000			
BLG	0,263	0,481	0,438	0,053	0,492	0,446	0,295	0,208	0,280	0,322	0,423	1,000		
CPT	0,247	0,169	0,362	-0,008	0,415	0,405	0,300	0,277	0,226	0,322	0,302	0,330	1,000	
EDI	0,069	0,104	0,024	0,042	0,116	-0,106	0,305	-0,013	0,187	-0,028	0,122	0,021	0,020	1,000
ENE	0,106	0,133	0,429	-0,065	0,287	0,455	0,162	0,263	0,255	0,273	0,410	0,211	0,211	0,020
ENI	0,244	0,385	0,464	0,218	0,336	0,344	0,277	0,111	0,058	0,309	0,305	0,326	0,326	0,020
FSW	0,329	0,192	0,186	-0,208	0,378	0,302	0,340	0,018	0,203	0,088	0,316	0,443	0,443	0,020
FIA	0,182	0,089	0,181	-0,126	0,271	0,407	0,243	0,279	0,261	0,333	0,312	0,377	0,377	0,020
FIN	0,243	0,166	0,427	0,047	0,382	0,368	0,348	0,198	0,160	0,216	0,298	0,435	0,435	0,020
GNL	0,364	0,201	0,139	0,020	0,173	0,282	0,260	0,260	0,079	0,190	0,248	0,281	0,281	0,020
ESP	0,199	0,321	0,226	0,077	0,517	0,319	0,375	0,232	0,286	0,273	0,301	0,509	0,509	0,020
ITA	0,068	0,311	0,501	0,088	0,341	0,475	0,054	0,189	0,279	0,406	0,313	0,491	0,491	0,020
LUX	0,047	0,358	0,283	-0,027	0,437	0,584	0,216	0,284	0,396	0,336	0,422	0,517	0,517	0,020
MST	0,336	0,392	-0,027	0,125	0,275	0,201	0,132	-0,002	0,157	0,130	0,080	0,275	0,275	0,020
MED	-0,108	0,087	0,114	0,024	0,133	0,240	0,138	0,421	0,140	0,166	0,113	0,220	0,220	0,020
MLM	0,396	0,460	0,518	0,129	0,528	0,402	0,285	0,161	0,335	0,394	0,404	0,615	0,615	0,020
MON	0,379	0,263	0,292	0,224	0,441	0,119	0,300	0,214	0,275	0,357	0,421	0,303	0,303	0,020
PIR	0,333	0,357	0,247	-0,010	0,269	0,337	0,451	0,053	0,278	0,104	0,355	0,366	0,366	0,020
RAS	0,316	0,135	0,084	0,111	0,026	0,176	0,199	0,093	0,072	0,251	0,355	0,119	0,119	0,020
RCS	-0,035	0,178	0,117	-0,086	0,378	0,089	0,212	0,242	0,200	0,250	0,200	0,090	0,090	0,020
SAI	0,125	0,253	0,349	0,209	0,317	0,282	0,186	-0,112	0,152	0,172	0,120	0,221	0,221	0,020
SPI	0,294	0,473	0,414	0,385	0,481	0,316	0,413	0,127	0,343	0,442	0,462	0,320	0,320	0,020

La diversificazione *naif*



La diversificazione à la Markowitz

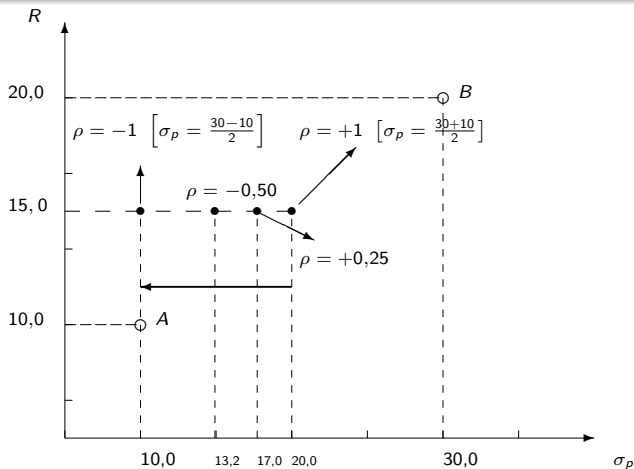


Figura: L'effetto della correlazione sulla volatilità del portafoglio — due attività finanziarie equipartite

L'efficienza in un portafoglio di titoli

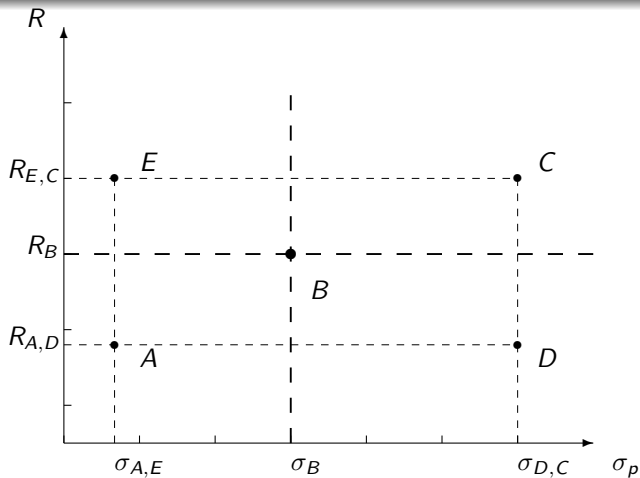


Figura: Portafogli dominanti e portafogli dominati.

- 1 Elementi di calcolo numerico
 - Valori approssimati: errori e loro propagazione
 - Risoluzione approssimata di funzioni
 - Markowitz: il modello media-varianza
- 2 Asset pricing e modello di Black-Scholes
 - Proprietà e ipotesi dell'asset pricing
 - Cox-Ross-Rubinstein e simulazioni Montecarlo
 - Il modello di Black-Scholes
- 3 "Greche" e tecniche di copertura
 - Delta e delta hedging
 - Theta, gamma e loro relazione con delta
 - Vega e rho
- 4 Early exercise e le opzioni americane
 - Early exercise su non-dividend options
 - L'effetto dei dividendi
 - Opzioni americane: approssimazione analitica

La volatilità del portafoglio [1]

In generale, invece, la varianza di un portafoglio composto da n attività finanziarie è data, utilizzando il calcolo matriciale, dalla seguente espressione:

$$\sigma_{ptf}^2 = w^T V w \quad (6)$$

La volatilità del portafoglio [2]

Dove in (6):

- w è il vettore colonna dei pesi delle attività finanziarie in portafoglio

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_n \end{bmatrix}$$

- w^T è il vettore riga dei pesi

$$w = [w_1, w_2, \dots, w_n]$$

- V è la matrice varianza-covarianza delle n attività finanziarie.

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1}^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2}^2 & \dots & \sigma_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \dots & \sigma_{n,n}^2 \end{bmatrix}$$

Un esempio: semplice

Consideriamo un portafoglio composto da due attività finanziarie, A e B rispettivamente con volatilità (misurate dalla deviazione standard) pari a 10,0% e 30,0% (σ_A e σ_B) e facciamo riferimento alla matrice in Tabella 4 in cui sono riportati i coefficienti di correlazione stimati tra le due attività finanziarie:

	A	B
A	+1,00	+0,25
B	+0,25	+1,00

Tabella: La matrice di correlazione

La matrice var-covar

	$(\sigma_A \cdot w_A)$	$(\sigma_B \cdot w_B)$
$(\sigma_A \cdot w_A)$	$\sigma_A^2 \cdot w_A^2$	$\sigma_{A,B} \cdot w_A \cdot w_B$
$(\sigma_B \cdot w_B)$	$\sigma_{B,A} \cdot w_B \cdot w_A$	$\sigma_B^2 \cdot w_B^2$

Tabella: La matrice varianza-covarianza

	$(10,0 \cdot 0,50)$	$(30,0 \cdot 0,50)$
$(10,0 \cdot 0,50)$	$100 \cdot 0,25$	$75 \cdot 0,25$
$(30,0 \cdot 0,50)$	$75 \cdot 0,25$	$900 \cdot 0,25$

Tabella: La matrice varianza-covarianza con valori

La matrice var-covar

	$(\sigma_A \cdot w_A)$	$(\sigma_B \cdot w_B)$
$(\sigma_A \cdot w_A)$	$\sigma_A^2 \cdot w_A^2$	$\sigma_{A,B} \cdot w_A \cdot w_B$
$(\sigma_B \cdot w_B)$	$\sigma_{B,A} \cdot w_B \cdot w_A$	$\sigma_B^2 \cdot w_B^2$

Tabella: La matrice varianza-covarianza

	$(10,0 \cdot 0,50)$	$(30,0 \cdot 0,50)$
$(10,0 \cdot 0,50)$	$100 \cdot 0,25$	$75 \cdot 0,25$
$(30,0 \cdot 0,50)$	$75 \cdot 0,25$	$900 \cdot 0,25$

Tabella: La matrice varianza-covarianza con valori

La matrice var-covar

	$(\sigma_A \cdot w_A)$	$(\sigma_B \cdot w_B)$
$(\sigma_A \cdot w_A)$	$\sigma_A^2 \cdot w_A^2$	$\sigma_{A,B} \cdot w_A \cdot w_B$
$(\sigma_B \cdot w_B)$	$\sigma_{B,A} \cdot w_B \cdot w_A$	$\sigma_B^2 \cdot w_B^2$

Tabella: La matrice varianza-covarianza

	$(10,0 \cdot 0,50)$	$(30,0 \cdot 0,50)$
$(10,0 \cdot 0,50)$	$100 \cdot 0,25$	$75 \cdot 0,25$
$(30,0 \cdot 0,50)$	$75 \cdot 0,25$	$900 \cdot 0,25$

Tabella: La matrice varianza-covarianza con valori

La volatilità del portafoglio (segue)

In Tabella 5 $\sigma_{B,A}$ è la covarianza tra A e B ottenuta facendo il prodotto tra le due deviazioni standard e il coefficiente di correlazione. La volatilità (misurata dalla varianza) del portafoglio è semplicemente la somma delle quattro caselle riportate in Tabella 6:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ptf}}^2 &= 100 \cdot 0,25 + 75 \cdot 0,25 + \\ &\quad + 75 \cdot 0,25 + 900 \cdot 0,25 = \\ &= 287,5\end{aligned}$$

per cui la volatilità del portafoglio composto dalle due attività finanziarie, A e B , con volatilità 10,0% e 30,0% con coefficiente di correlazione pari a +0,25 è pari a:

$$\sigma_{\text{ptf}} = \sqrt{287,5} = 16,9(\%)$$

La volatilità del portafoglio (segue)

In Tabella 5 $\sigma_{B,A}$ è la covarianza tra A e B ottenuta facendo il prodotto tra le due deviazioni standard e il coefficiente di correlazione. La volatilità (misurata dalla varianza) del portafoglio è semplicemente la somma delle quattro caselle riportate in Tabella 6:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ptf}}^2 &= 100 \cdot 0,25 + 75 \cdot 0,25 + \\ &\quad + 75 \cdot 0,25 + 900 \cdot 0,25 = \\ &= 287,5\end{aligned}$$

per cui la volatilità del portafoglio composto dalle due attività finanziarie, A e B , con volatilità 10,0% e 30,0% con coefficiente di correlazione pari a +0,25 è pari a:

$$\sigma_{\text{ptf}} = \sqrt{287,5} = 16,9(\%)$$

La volatilità del portafoglio (segue)

In Tabella 5 $\sigma_{B,A}$ è la covarianza tra A e B ottenuta facendo il prodotto tra le due deviazioni standard e il coefficiente di correlazione. La volatilità (misurata dalla varianza) del portafoglio è semplicemente la somma delle quattro caselle riportate in Tabella 6:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ptf}}^2 &= 100 \cdot 0,25 + 75 \cdot 0,25 + \\ &\quad + 75 \cdot 0,25 + 900 \cdot 0,25 = \\ &= 287,5\end{aligned}$$

per cui la volatilità del portafoglio composto dalle due attività finanziarie, A e B , con volatilità 10,0% e 30,0% con coefficiente di correlazione pari a +0,25 è pari a:

$$\sigma_{\text{ptf}} = \sqrt{287,5} = 16,9(\%)$$

La volatilità del portafoglio (segue)

In Tabella 5 $\sigma_{B,A}$ è la covarianza tra A e B ottenuta facendo il prodotto tra le due deviazioni standard e il coefficiente di correlazione. La volatilità (misurata dalla varianza) del portafoglio è semplicemente la somma delle quattro caselle riportate in Tabella 6:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ptf}}^2 &= 100 \cdot 0,25 + 75 \cdot 0,25 + \\ &\quad + 75 \cdot 0,25 + 900 \cdot 0,25 = \\ &= 287,5\end{aligned}$$

per cui la volatilità del portafoglio composto dalle due attività finanziarie, A e B , con volatilità 10,0% e 30,0% con coefficiente di correlazione pari a +0,25 è pari a:

$$\sigma_{\text{ptf}} = \sqrt{287,5} = 16,9(\%)$$

La volatilità del portafoglio (segue)

In Tabella 5 $\sigma_{B,A}$ è la covarianza tra A e B ottenuta facendo il prodotto tra le due deviazioni standard e il coefficiente di correlazione. La volatilità (misurata dalla varianza) del portafoglio è semplicemente la somma delle quattro caselle riportate in Tabella 6:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ptf}}^2 &= 100 \cdot 0,25 + 75 \cdot 0,25 + \\ &\quad + 75 \cdot 0,25 + 900 \cdot 0,25 = \\ &= 287,5\end{aligned}$$

per cui la volatilità del portafoglio composto dalle due attività finanziarie, A e B , con volatilità 10,0% e 30,0% con coefficiente di correlazione pari a +0,25 è pari a:

$$\sigma_{\text{ptf}} = \sqrt{287,5} = 16,9(\%)$$

Applicazioni su Excel

- La costruzione della frontiera efficiente (rinvio al materiale del corso in bibliografia, v. [Vanzini 2008]);
- Il calcolo della volatilità del portafoglio.

- 1 Elementi di calcolo numerico
 - Valori approssimati: errori e loro propagazione
 - Risoluzione approssimata di funzioni
 - Markowitz: il modello media-varianza
- 2 Asset pricing e modello di Black-Scholes
 - Proprietà e ipotesi dell'asset pricing
 - Cox-Ross-Rubinstein e simulazioni Montecarlo
 - Il modello di Black-Scholes
- 3 "Greche" e tecniche di copertura
 - Delta e delta hedging
 - Theta, gamma e loro relazione con delta
 - Vega e rho
- 4 Early exercise e le opzioni americane
 - Early exercise su non-dividend options
 - L'effetto dei dividendi
 - Opzioni americane: approssimazione analitica

Mercati perfetti

I mercati finanziari sono "perfetti":

- Non esistono opportunità inespresse di arbitraggio;
 - ① LOP (Law of one price): l'arbitraggio interspaziale non porta alcun profitto;
 - ② NFLU e NFLO (No free lunch e no free lotteries): l'arbitraggio intertemporale non porta alcun profitto.
- Aspettative omogenee;
- Non ci sono attriti sui mercati finanziari: è sempre possibile sia acquistare che vendere (anche allo scoperto).
- E' sempre possibile replicare il pay-out di una strategia con un'altra strategia.

Il caso dei fondi hedge [Khandani Lo 2007]

Mercati perfetti

I mercati finanziari sono "perfetti":

- Non esistono opportunità inespresse di arbitraggio;
 - ① LOP (Law of one price): l'arbitraggio interspaziale non porta alcun profitto;
 - ② NFLU e NFLO (No free lunch e no free lotteries): l'arbitraggio intertemporale non porta alcun profitto.
- Aspettative omogenee;
- Non ci sono attriti sui mercati finanziari: è sempre possibile sia acquistare che vendere (anche allo scoperto).
- E' sempre possibile replicare il pay-out di una strategia con un'altra strategia.

Il caso dei fondi hedge [Khandani Lo 2007]

- 1 Elementi di calcolo numerico
 - Valori approssimati: errori e loro propagazione
 - Risoluzione approssimata di funzioni
 - Markowitz: il modello media-varianza
- 2 Asset pricing e modello di Black-Scholes
 - Proprietà e ipotesi dell'asset pricing
 - Cox-Ross-Rubinstein e simulazioni Montecarlo
 - Il modello di Black-Scholes
- 3 "Greche" e tecniche di copertura
 - Delta e delta hedging
 - Theta, gamma e loro relazione con delta
 - Vega e rho
- 4 Early exercise e le opzioni americane
 - Early exercise su non-dividend options
 - L'effetto dei dividendi
 - Opzioni americane: approssimazione analitica

L'opzione call

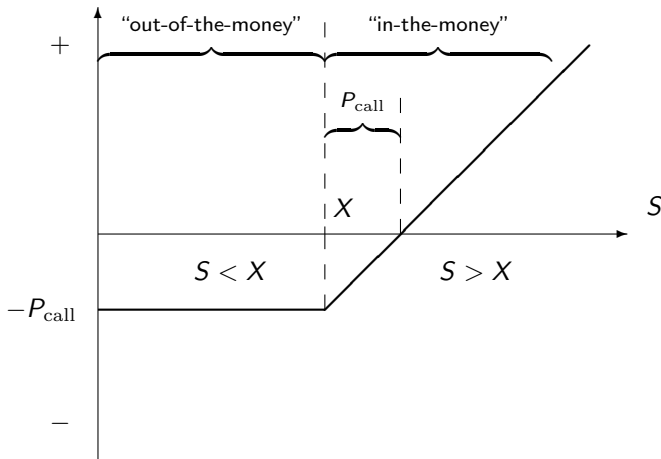


Figura: L'acquirente dell'opzione call.

Il venditore dell'opzione put

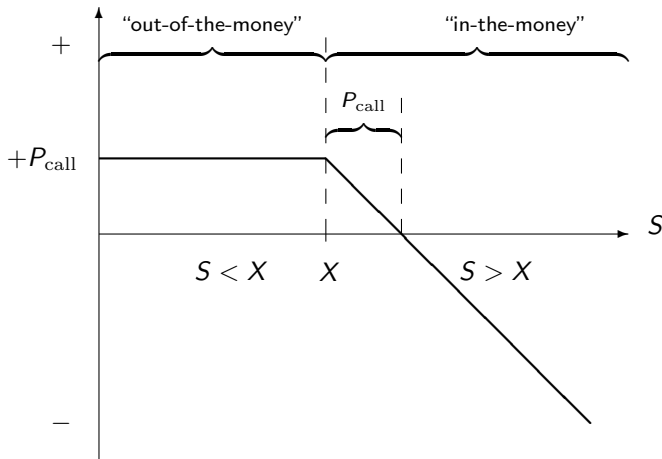


Figura: Il venditore dell'opzione call.

L'acquirente dell'opzione put

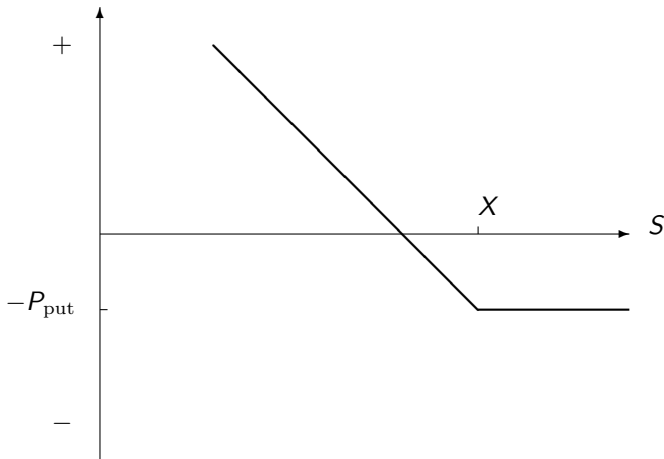


Figura: L'acquirente dell'opzione put

Il venditore dell'opzione put

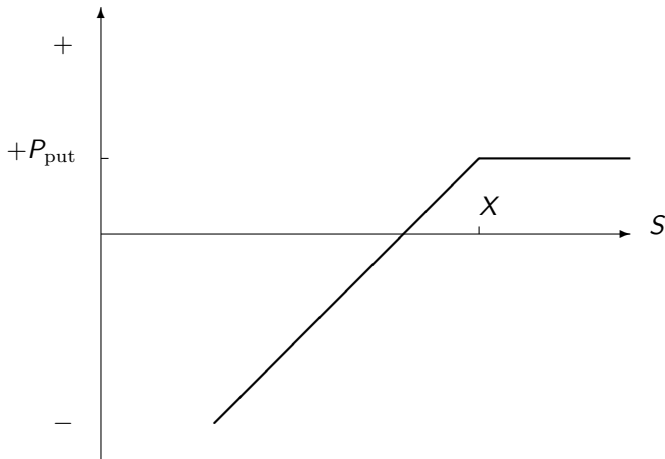


Figura: Il venditore dell'opzione put

La copertura di un'asset tramite l'acquisto dell'opzione put

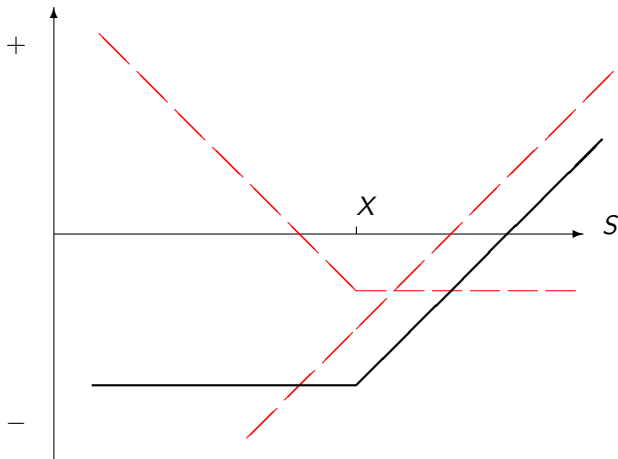


Figura: Copertura con un put.

La copertura di un'asset con il future

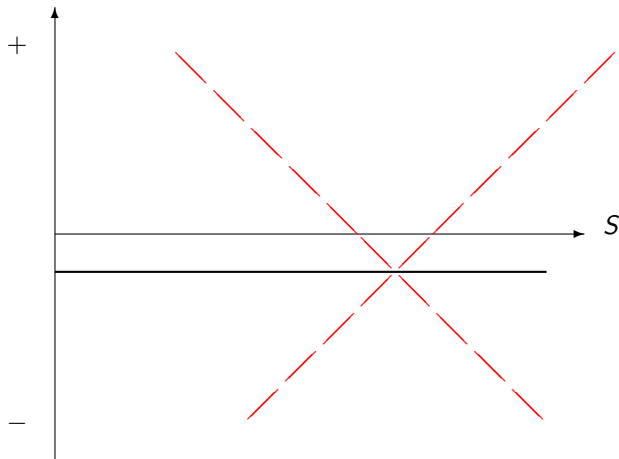
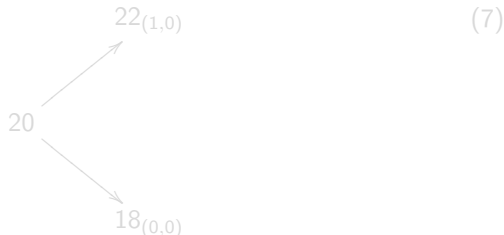


Figura: Copertura con la "vendita" di un future.

L'albero binomiale [1-step]

Consideriamo un'opzione call con strike price pari a 21 su di un titolo che quota a 20 che tra 3 mesi quoterà o 22 o 18, considerando un tasso risk-free pari al 4,00%:

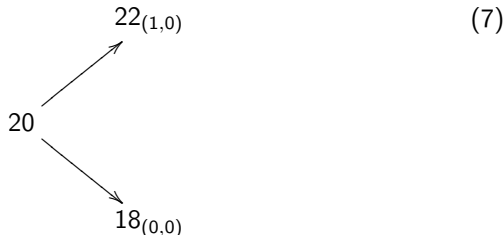


In un mondo *risk-neutral* definiamo p come la probabilità che il titolo salga a 22 euro.

$$22p + 18(1 - p) = 20e^{0,04 \cdot 0,25} \quad (8)$$

L'albero binomiale [1-step]

Consideriamo un'opzione call con strike price pari a 21 su di un titolo che quota a 20 che tra 3 mesi quoterà o 22 o 18, considerando un tasso risk-free pari al 4,00%:

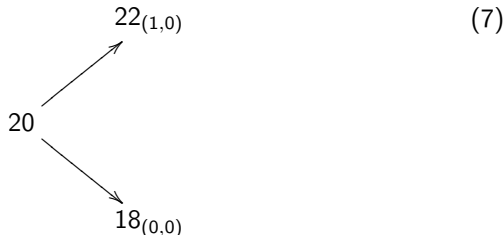


In un mondo *risk-neutral* definiamo p come la probabilità che il titolo salga a 22 euro.

$$22p + 18(1 - p) = 20e^{0,04 \cdot 0,25} \quad (8)$$

L'albero binomiale [1-step]

Consideriamo un'opzione call con strike price pari a 21 su di un titolo che quota a 20 che tra 3 mesi quoterà o 22 o 18, considerando un tasso risk-free pari al 4,00%:



In un mondo *risk-neutral* definiamo p come la probabilità che il titolo salga a 22 euro.

$$22p + 18(1 - p) = 20e^{0,04 \cdot 0,25} \quad (8)$$

L'albero binomiale [1-step] 2

$$4p = 20e^{0,04 \cdot 0,25} - 18 \quad (9)$$

segue che:

$$p = 0,5502$$

La probabilità che l'opzione valga 1 euro è dunque 0,5502 per cui il valore dell'opzione è:

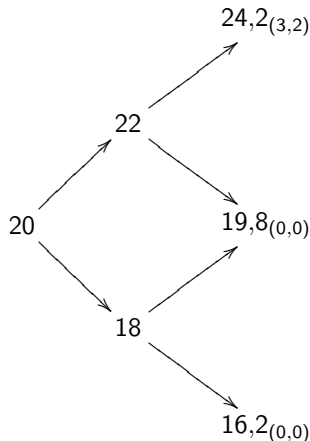
$$p = 0,5502 \cdot 1 + (1 - 0,5502) \cdot 0 = 0,5502$$

attualizzando, il valore dell'opzione diventa:

$$c = 0,5502e^{-0,04 \cdot 0,25} = 0,5472$$

[La probabilità che l'azione salga o scenda è già implicita nella quotazione.]

L'albero binomiale [2-step]



(10)

L'albero binomiale [2-step]

Ragionando come prima:

$$22e^{0,04 \cdot 0,25} = p24,2 + (1 - p)19,8$$

da cui:

$$4,4p = 22e^{0,04 \cdot 0,25} - 19,8$$

quindi:

$$p = 0,5503$$

$$c = 0,5503 \cdot 3,2e^{-0,04 \cdot 0,25} + (1 - 0,5503) \cdot 0,0e^{-0,04 \cdot 0,25} = 1,7433$$

L'albero binomiale [2-step]

Ragionando come prima:

$$22e^{0,04 \cdot 0,25} = p24,2 + (1 - p) 19,8$$

da cui:

$$4,4p = 22e^{0,04 \cdot 0,25} - 19,8$$

quindi:

$$p = 0,5503$$

$$c = 0,5503 \cdot 3,2e^{-0,04 \cdot 0,25} + (1 - 0,5503) \cdot 0,0e^{-0,04 \cdot 0,25} = 1,7433$$

L'albero binomiale [2-step]

Ragionando come prima:

$$22e^{0,04 \cdot 0,25} = p24,2 + (1 - p) 19,8$$

da cui:

$$4,4p = 22e^{0,04 \cdot 0,25} - 19,8$$

quindi:

$$p = 0,5503$$

$$c = 0,5503 \cdot 3,2e^{-0,04 \cdot 0,25} + (1 - 0,5503) \cdot 0,0e^{-0,04 \cdot 0,25} = 1,7433$$

L'albero binomiale [2-step]

Ragionando come prima:

$$22e^{0,04 \cdot 0,25} = p24,2 + (1 - p) 19,8$$

da cui:

$$4,4p = 22e^{0,04 \cdot 0,25} - 19,8$$

quindi:

$$p = 0,5503$$

$$c = 0,5503 \cdot 3,2e^{-0,04 \cdot 0,25} + (1 - 0,5503) \cdot 0,0e^{-0,04 \cdot 0,25} = 1,7433$$

L'albero binomiale [2-step]

Ragionando come prima:

$$22e^{0,04 \cdot 0,25} = p24,2 + (1 - p) 19,8$$

da cui:

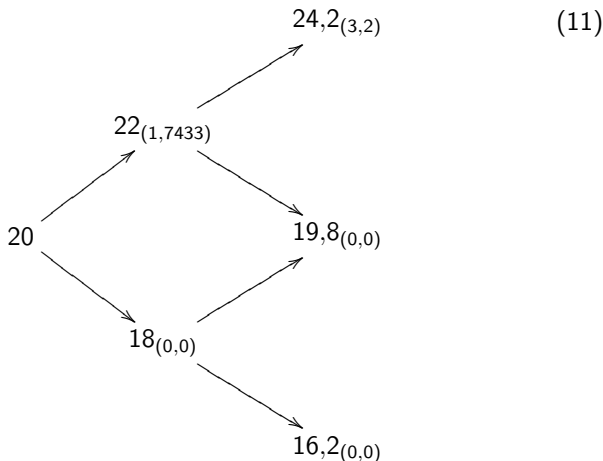
$$4,4p = 22e^{0,04 \cdot 0,25} - 19,8$$

quindi:

$$p = 0,5503$$

$$c = 0,5503 \cdot 3,2e^{-0,04 \cdot 0,25} + (1 - 0,5503) \cdot 0,0e^{-0,04 \cdot 0,25} = 1,7433$$

Il valore dell'opzione al tempo 1

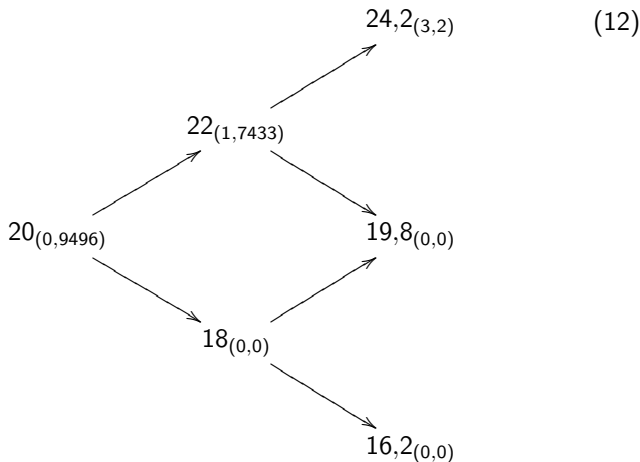


Ultimo passaggio

Facendo riferimento alla equazione (9) la probabilità $p = 0,5502$ il valore dell'opzione è dato da:

$$c = 0,5502 \cdot 1,7433e^{-0,04 \cdot 0,25} + (1 - 0,5502) \cdot 0,0e^{-0,04 \cdot 0,25} = 0,9496$$

Il valore dell'opzione al tempo 0



Procedimento a ritroso lungo l'albero

Dall'esempio appena visto dovrebbe essere intuitivo come è possibile valutare un'opzione procedendo a ritroso lungo i nodi modellati nell'albero binomiale.

Introduciamo alcuni ulteriori parametri per rendere più realistico il modello: u e d che rispettivamente rappresentano la variazione positiva ($u > 1$, *up* movement) e negativa ($d < 1$ *down* movement) nella quotazione del titolo [ad esempio: $u = 1,10$ e $d = 0,85$].

La determinazione di p , u e d nel modello di Cox-Ross-Rubinstein ...

La determinazione di p , u e d

In un mondo *risk-neutral* (tutti) i titoli pagano un rendimento uguale a quello dell'attività risk-free, dunque (S la quotazione corrente dell'attività finanziaria):

$$Se^{r\Delta t} = pSu + (1 - p)Sd \quad (13)$$

$$e^{r\Delta t} = pu + (1 - p)d \quad (14)$$

da cui eliminando alcune cose otteniamo:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad ; \quad u = \frac{1}{d} \quad (15)$$

$$p = \frac{a - d}{u - d} \quad \text{dove} \quad a = e^{r\Delta t} \quad (16)$$

La determinazione di p , u e d

In un mondo *risk-neutral* (tutti) i titoli pagano un rendimento uguale a quello dell'attività risk-free, dunque (S la quotazione corrente dell'attività finanziaria):

$$Se^{r\Delta t} = pSu + (1 - p)Sd \quad (13)$$

$$e^{r\Delta t} = pu + (1 - p)d \quad (14)$$

da cui eliminando alcune cose otteniamo:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad ; \quad u = \frac{1}{d} \quad (15)$$

$$p = \frac{a - d}{u - d} \quad \text{dove} \quad a = e^{r\Delta t} \quad (16)$$

La determinazione di p , u e d

In un mondo *risk-neutral* (tutti) i titoli pagano un rendimento uguale a quello dell'attività risk-free, dunque (S la quotazione corrente dell'attività finanziaria):

$$Se^{r\Delta t} = pSu + (1 - p)Sd \quad (13)$$

$$e^{r\Delta t} = pu + (1 - p)d \quad (14)$$

da cui eliminando alcune cose otteniamo:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad ; \quad u = \frac{1}{d} \quad (15)$$

$$p = \frac{a - d}{u - d} \quad \text{dove} \quad a = e^{r\Delta t} \quad (16)$$

La determinazione di p , u e d

In un mondo *risk-neutral* (tutti) i titoli pagano un rendimento uguale a quello dell'attività risk-free, dunque (S la quotazione corrente dell'attività finanziaria):

$$Se^{r\Delta t} = pSu + (1 - p)Sd \quad (13)$$

$$e^{r\Delta t} = pu + (1 - p)d \quad (14)$$

da cui eliminando alcune cose otteniamo:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad ; \quad u = \frac{1}{d} \quad (15)$$

$$p = \frac{a - d}{u - d} \quad \text{dove} \quad a = e^{r\Delta t} \quad (16)$$

La determinazione di p , u e d

In un mondo *risk-neutral* (tutti) i titoli pagano un rendimento uguale a quello dell'attività risk-free, dunque (S la quotazione corrente dell'attività finanziaria):

$$Se^{r\Delta t} = pSu + (1 - p)Sd \quad (13)$$

$$e^{r\Delta t} = pu + (1 - p)d \quad (14)$$

da cui eliminando alcune cose otteniamo:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad ; \quad u = \frac{1}{d} \quad (15)$$

$$p = \frac{a - d}{u - d} \quad \text{dove} \quad a = e^{r\Delta t} \quad (16)$$

I parametri del modello Cox-Ross-Rubinstein

Dati:

- $r = 4,0\%$ (risk-free);
- $\sigma = 20,0\%$ (volatilità);
- $\Delta t = 0,5$ (tempo in anni);

$$u = e^{0,20 \cdot \sqrt{0,5}} = 1,15 \quad d = \frac{1}{u} = 0,87 \quad a = e^{0,04 \cdot 0,5} = 1,02$$

per cui:

$$p = \frac{1,02 - 0,87}{1,15 - 0,87} = 0,54$$

I parametri del modello Cox-Ross-Rubinstein

Dati:

- $r = 4,0\%$ (risk-free);
- $\sigma = 20,0\%$ (volatilità);
- $\Delta t = 0,5$ (tempo in anni);

$$u = e^{0,20 \cdot \sqrt{0,5}} = 1,15 \quad d = \frac{1}{u} = 0,87 \quad a = e^{0,04 \cdot 0,5} = 1,02$$

per cui:

$$p = \frac{1,02 - 0,87}{1,15 - 0,87} = 0,54$$

I parametri del modello Cox-Ross-Rubinstein

Dati:

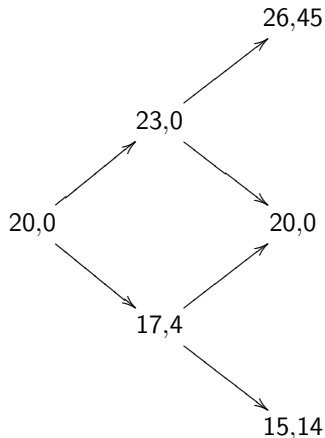
- $r = 4,0\%$ (risk-free);
- $\sigma = 20,0\%$ (volatilità);
- $\Delta t = 0,5$ (tempo in anni);

$$u = e^{0,20 \cdot \sqrt{0,5}} = 1,15 \quad d = \frac{1}{u} = 0,87 \quad a = e^{0,04 \cdot 0,5} = 1,02$$

per cui:

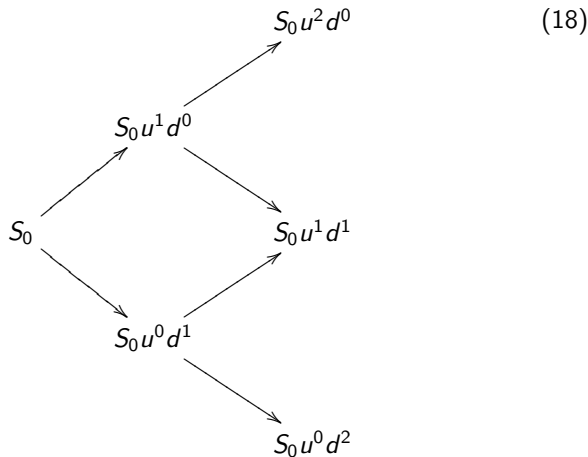
$$p = \frac{1,02 - 0,87}{1,15 - 0,87} = 0,54$$

L'albero dei prezzi



(17)

L'albero dei prezzi [in generale]



I prezzi del titolo sull'albero binomiale

In ogni momento i prezzi del titolo possono essere modellati a questo modo:

$$S_i = S_0 u^j d^{i-j} \quad j = 0, 1, \dots, i \quad (19)$$

Per cui il valore dell'opzione viene "calcolato" a ritroso lungo l'albero verificando di volta in volta se (trattandosi di un'opzione americana) eventualmente l'esercizio anticipato sia conveniente o meno rispetto al valore atteso dell'opzione.

Considerando l'opzione call con strike pari a 21 e attualizzando i valori attesi, otteniamo ...

I prezzi del titolo sull'albero binomiale

In ogni momento i prezzi del titolo possono essere modellati a questo modo:

$$S_i = S_0 u^j d^{i-j} \quad j = 0, 1, \dots, i \quad (19)$$

Per cui il valore dell'opzione viene "calcolato" a ritroso lungo l'albero verificando di volta in volta se (trattandosi di un'opzione americana) eventualmente l'esercizio anticipato sia conveniente o meno rispetto al valore atteso dell'opzione.

Considerando l'opzione call con strike pari a 21 e attualizzando i valori attesi, otteniamo ...

I prezzi del titolo sull'albero binomiale

In ogni momento i prezzi del titolo possono essere modellati a questo modo:

$$S_i = S_0 u^j d^{i-j} \quad j = 0, 1, \dots, i \quad (19)$$

Per cui il valore dell'opzione viene "calcolato" a ritroso lungo l'albero verificando di volta in volta se (trattandosi di un'opzione americana) eventualmente l'esercizio anticipato sia conveniente o meno rispetto al valore atteso dell'opzione.

Considerando l'opzione call con strike pari a 21 e attualizzando i valori attesi, otteniamo ...

I prezzi del titolo sull'albero binomiale

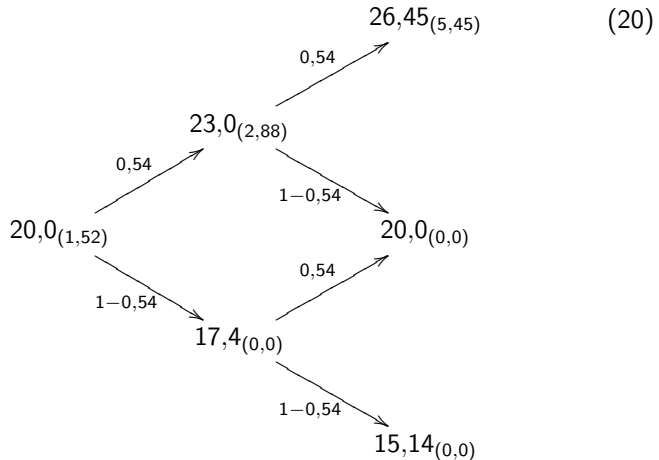
In ogni momento i prezzi del titolo possono essere modellati a questo modo:

$$S_i = S_0 u^j d^{i-j} \quad j = 0, 1, \dots, i \quad (19)$$

Per cui il valore dell'opzione viene "calcolato" a ritroso lungo l'albero verificando di volta in volta se (trattandosi di un'opzione americana) eventualmente l'esercizio anticipato sia conveniente o meno rispetto al valore atteso dell'opzione.

Considerando l'opzione call con strike pari a 21 e attualizzando i valori attesi, otteniamo ...

Il valore dell'opzione



La put-call parity

E' possibile derivare il valore di un'opzione call europea dal valore di un'opzione put sulla base della seguente relazione:

$$C + Xe^{-rT} = P + S \quad (21)$$

- 1 Elementi di calcolo numerico
 - Valori approssimati: errori e loro propagazione
 - Risoluzione approssimata di funzioni
 - Markowitz: il modello media-varianza
- 2 Asset pricing e modello di Black-Scholes
 - Proprietà e ipotesi dell'asset pricing
 - Cox-Ross-Rubinstein e simulazioni Montecarlo
 - Il modello di Black-Scholes
- 3 "Greche" e tecniche di copertura
 - Delta e delta hedging
 - Theta, gamma e loro relazione con delta
 - Vega e rho
- 4 Early exercise e le opzioni americane
 - Early exercise su non-dividend options
 - L'effetto dei dividendi
 - Opzioni americane: approssimazione analitica

Procedura di simulazione

Considerando un derivato il cui valore dipenda dall'attività finanziaria A si può procedere come segue:

- 1 Si produce un percorso casuale per l'attività A ;
- 2 Si calcola il pay-off del derivato;
- 3 Si ripetono gli step precedenti un numero n di volte;
- 4 Si calcola il valore medio dei pay-off del derivato;
- 5 Si attualizza il valore medio per stimare il valore del derivato.

Il processo di Wiener

Il percorso seguito da un'attività finanziaria (A) in un mondo risk-neutral è:

$$dA = \hat{\mu}A dt + \sigma A dz \quad (22)$$

dove $\hat{\mu}$ è il rendimento atteso dell'attività e σ la volatilità.

Il processo di Wiener

Il percorso seguito da un'attività finanziaria (A) in un mondo risk-neutral è:

$$dA = \hat{\mu}A dt + \sigma A dz \quad (22)$$

dove $\hat{\mu}$ è il rendimento atteso dell'attività e σ la volatilità.

Il processo di Wiener

Il percorso seguito da un'attività finanziaria (A) in un mondo risk-neutral è:

$$dA = \hat{\mu}A dt + \sigma A dz \quad (22)$$

dove $\hat{\mu}$ è il rendimento atteso dell'attività e σ la volatilità.

Il lemma di Ito

Ai nostri fini è utile considerare le conclusioni più importanti del (noto) lemma di Ito. Definendo:

$$G = \ln A \quad (23)$$

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (24)$$

Questa equazione indica che G segue un processo di Wiener generalizzato; la variazione in A tra il tempo zero un tempo futuro, T , è distribuita normalmente con media e varianza rispettivamente:

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \quad ; \quad \sigma^2 T \quad (25)$$

Il lemma di Ito

Ai nostri fini è utile considerare le conclusioni più importanti del (noto) lemma di Ito. Definendo:

$$G = \ln A \quad (23)$$

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (24)$$

Questa equazione indica che G segue un processo di Wiener generalizzato; la variazione in A tra il tempo zero un tempo futuro, T , è distribuita normalmente con media e varianza rispettivamente:

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \quad ; \quad \sigma^2 T \quad (25)$$

Il lemma di Ito

Ai nostri fini è utile considerare le conclusioni più importanti del (noto) lemma di Ito. Definendo:

$$G = \ln A \quad (23)$$

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (24)$$

Questa equazione indica che G segue un processo di Wiener generalizzato; la variazione in A tra il tempo zero un tempo futuro, T , è distribuita normalmente con media e varianza rispettivamente:

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \quad ; \quad \sigma^2 T \quad (25)$$

Random-walk

Dall'espressione in (21) si può scrivere che il processo seguito da A è:

$$d \ln A = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (26)$$

o in modo equivalente:

$$A(t + \Delta t) = A(t) \left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \right] \quad (27)$$

dove in (26) ϵ è un campione casuale da una distribuzione normale con media zero e varianza 1,0. Nella maggior parte dei linguaggi di programmazione esistono strumenti per la generazione di numeri campionati dall'intervallo $[0,1]$ (su Excel ad esempio =CASUALE()).

Random-walk

Dall'espressione in (21) si può scrivere che il processo seguito da A è:

$$d \ln A = \left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (26)$$

o in modo equivalente:

$$A(t + \Delta t) = A(t) \left[\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \right] \quad (27)$$

dove in (26) ϵ è un campione casuale da una distribuzione normale con media zero e varianza 1,0. Nella maggior parte dei linguaggi di programmazione esistono strumenti per la generazione di numeri campionati dall'intervallo $[0,1]$ (su Excel ad esempio =CASUALE()).

Il numero di percorsi da generare

Si può facilmente dimostrare che se c è il valore di un derivato la cui media μ e deviazione standard ω allora l'errore standard della stima è:

$$\frac{\omega}{\sqrt{N}}$$

Indicando con N il numero di percorsi generati un intervallo di ampiezza $\pm 1,96$ deviazioni standard contiene il 95% di confidenza, per cui:

$$\mu - \frac{1,96\omega}{\sqrt{N}} < c < \mu + \frac{1,96\omega}{\sqrt{N}} \quad (28)$$

L'incertezza circa il vero valore dipende dunque da $N \dots$

Generazione di campioni casuali da distr. normali

Definendo ω_i un numero ottenuto dal campionamento da una distribuzione uniforme nell'intervallo $[0,1]$ (=CASUALE(), su Excel), definiamo:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{12} \omega_i - 6 \quad (29)$$

In (28) $\epsilon \sim N(0, 1)$

Generazione di campioni casuali da distr. normali

Definendo ω_i un numero ottenuto dal campionamento da una distribuzione uniforme nell'intervallo $[0,1]$ (=CASUALE(), su Excel), definiamo:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{12} \omega_i - 6 \quad (29)$$

In (28) $\epsilon \sim N(0, 1)$

Generazione di campioni casuali correlati da distr. normali

Se dobbiamo campionare due numeri **correlati** ϵ_1 e ϵ_2 si campionano due numeri indipendenti x e y da distribuzioni normali come in (28), poi si procede come di seguito:

$$\epsilon_1 = x \quad ; \quad \epsilon_2 = \rho x + y\sqrt{1 - \rho^2} \quad (30)$$

In (29) ρ è l'indice di correlazione.

Generazione di campioni casuali correlati da distr. normali

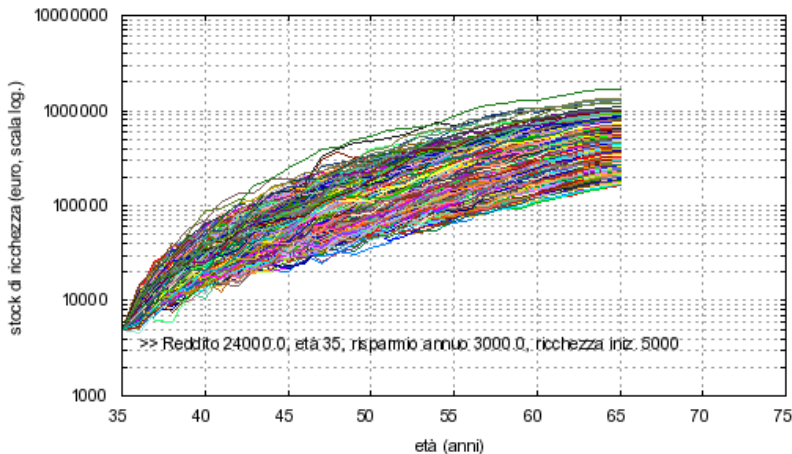
Se dobbiamo campionare due numeri **correlati** ϵ_1 e ϵ_2 si campionano due numeri indipendenti x e y da distribuzioni normali come in (28), poi si procede come di seguito:

$$\epsilon_1 = x \quad ; \quad \epsilon_2 = \rho x + y\sqrt{1 - \rho^2} \quad (30)$$

In (29) ρ è l'indice di correlazione.

Simulazioni Montecarlo [1]

Life Cycle Exponential Wealth Planner (Copyright 2007)



Applicazioni su Excel

- Applicazioni su Excel;
- Rinvio ai riferimenti bibliografici (e al materiale previsto per il corso, v. [Vanzini 2008])

- 1 Elementi di calcolo numerico
 - Valori approssimati: errori e loro propagazione
 - Risoluzione approssimata di funzioni
 - Markowitz: il modello media-varianza
- 2 Asset pricing e modello di Black-Scholes
 - Proprietà e ipotesi dell'asset pricing
 - Cox-Ross-Rubinstein e simulazioni Montecarlo
 - Il modello di Black-Scholes
- 3 "Greche" e tecniche di copertura
 - Delta e delta hedging
 - Theta, gamma e loro relazione con delta
 - Vega e rho
- 4 Early exercise e le opzioni americane
 - Early exercise su non-dividend options
 - L'effetto dei dividendi
 - Opzioni americane: approssimazione analitica

La formula di Black-Scholes

Più frequentemente, per la valutazione di un'opzione si ricorre alla nota formula di Black-Scholes per prezzare un'opzione di tipo europeo:

Dati i seguenti:

- 1 \ln il logaritmo naturale;
- 2 $Call$ il valore dell'opzione call;
- 3 S il prezzo spot del sottostante;
- 4 X lo strike price;
- 5 r il tasso privo di rischio;
- 6 e l'antilogaritmo (2,718...);
- 7 σ la deviazione standard del sottostante;
- 8 T il tempo a scadenza;
- 9 $N(.)$ la probabilità cumulata in una distribuzione normale.

La formula di Black-Scholes

La nota formula di Black-Scholes è la seguente:

$$Call = SN(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \quad (31)$$

dove in (30):

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + 0,5 \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (32)$$

e:

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T} \quad (33)$$

La formula di Black-Scholes

La nota formula di Black-Scholes è la seguente:

$$Call = SN(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \quad (31)$$

dove in (30):

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + 0,5 \sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (32)$$

e:

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (33)$$

L'effetto dei dividendi

$$Call = Se^{-qT} N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \quad (34)$$

dove in (??), q è il *dividend yield*:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r - q + 0,5 \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (35)$$

e:

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T} \quad (36)$$

L'effetto dei dividendi

$$Call = Se^{-qT} N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2) \quad (34)$$

dove in (??), q è il *dividend yield*:

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r - q + 0,5 \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}} \quad (35)$$

e:

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T} \quad (36)$$

Il "delta" dell'opzione

Per un'opzione call di tipo europeo che paghi dividendi (*dividend yield* q):

$$\Delta = e^{-qT} N(d_1) \quad (37)$$

Per un'opzione put di tipo europeo: *dividend yield* q):

$$\Delta = e^{-qT} [N(d_1) - 1] \quad (38)$$

Il delta (Δ) dell'opzione è la derivata prima, rispetto alla quotazione del sottostante S della funzione del valore dell'opzione.

Viene anche "letto" come **la probabilità che l'opzione sia esercitata alla scadenza.**

Il "delta" dell'opzione

Per un'opzione call di tipo europeo che paghi dividendi (*dividend yield* q):

$$\Delta = e^{-qT} N(d_1) \quad (37)$$

Per un'opzione put di tipo europeo: *dividend yield* q):

$$\Delta = e^{-qT} [N(d_1) - 1] \quad (38)$$

Il delta (Δ) dell'opzione è la derivata prima, rispetto alla quotazione del sottostante S della funzione del valore dell'opzione.

Viene anche "letto" come **la probabilità che l'opzione sia esercitata alla scadenza.**

Il "delta" dell'opzione

Per un'opzione call di tipo europeo che paghi dividendi (*dividend yield* q):

$$\Delta = e^{-qT} N(d_1) \quad (37)$$

Per un'opzione put di tipo europeo: *dividend yield* q):

$$\Delta = e^{-qT} [N(d_1) - 1] \quad (38)$$

Il delta (Δ) dell'opzione è la derivata prima, rispetto alla quotazione del sottostante S della funzione del valore dell'opzione.

Viene anche "letto" come **la probabilità che l'opzione sia esercitata alla scadenza.**

Il "delta" dell'opzione

Per un'opzione call di tipo europeo che paghi dividendi (*dividend yield* q):

$$\Delta = e^{-qT} N(d_1) \quad (37)$$

Per un'opzione put di tipo europeo: *dividend yield* q):

$$\Delta = e^{-qT} [N(d_1) - 1] \quad (38)$$

Il delta (Δ) dell'opzione è la derivata prima, rispetto alla quotazione del sottostante S della funzione del valore dell'opzione.

Viene anche "letto" come **la probabilità che l'opzione sia esercitata alla scadenza.**

Il "delta" dell'opzione

Per un'opzione call di tipo europeo che paghi dividendi (*dividend yield* q):

$$\Delta = e^{-qT} N(d_1) \quad (37)$$

Per un'opzione put di tipo europeo: *dividend yield* q):

$$\Delta = e^{-qT} [N(d_1) - 1] \quad (38)$$

Il delta (Δ) dell'opzione è la derivata prima, rispetto alla quotazione del sottostante S della funzione del valore dell'opzione.

Viene anche "letto" come **la probabilità che l'opzione sia esercitata alla scadenza.**

Theta e Gamma

Per un'opzione call di tipo europeo che paghi dividendi (*dividend yield* q):

$$\Theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} + qSN(d_1)e^{-qT} - rXe^{-rT}Nd_2 \quad (39)$$

Per un'opzione put di tipo europeo: *dividend yield* q):

$$\Theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} + qSN(-d_1)e^{-qT} + rXe^{-rT}N-d_2 \quad (40)$$

Theta e Gamma

Per un'opzione call di tipo europeo che paghi dividendi (*dividend yield* q):

$$\Theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} + qSN(d_1)e^{-qT} - rXe^{-rT}Nd_2 \quad (39)$$

Per un'opzione put di tipo europeo: *dividend yield* q):

$$\Theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} + qSN(-d_1)e^{-qT} + rXe^{-rT}N-d_2 \quad (40)$$

Theta e Gamma

Per un'opzione call di tipo europeo che paghi dividendi (*dividend yield* q):









$$\Theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} + qSN(d_1)e^{-qT} - rXe^{-rT}Nd_2 \quad (39)$$

Per un'opzione put di tipo europeo: *dividend yield* q):

$$\Theta = -\frac{SN'(d_1)\sigma e^{-qT}}{2\sqrt{T}} + qSN(-d_1)e^{-qT} + rXe^{-rT}N-d_2 \quad (40)$$

- 1 Elementi di calcolo numerico
 - Valori approssimati: errori e loro propagazione
 - Risoluzione approssimata di funzioni
 - Markowitz: il modello media-varianza
- 2 Asset pricing e modello di Black-Scholes
 - Proprietà e ipotesi dell'asset pricing
 - Cox-Ross-Rubinstein e simulazioni Montecarlo
 - Il modello di Black-Scholes
- 3 "Greche" e tecniche di copertura
 - Delta e delta hedging
 - Theta, gamma e loro relazione con delta
 - Vega e rho
- 4 Early exercise e le opzioni americane
 - Early exercise su non-dividend options
 - L'effetto dei dividendi
 - Opzioni americane: approssimazione analitica

Riferimenti bibliografici

-  Arnold, T., Nixon, T.D., Shockley, R.L.Jr., *Intuitive Black-Scholes Option Pricing With A Simple Table*, The Journal of Applied Finance, Spring-Summer 2003.
-  Bellalah, M., Brys, E., Mai, H.M., Varenne de, F., *Options, Futures & Exotic Derivatives*, Wiley, 1998.
-  Benninga, S., *Financial Modeling*, Massachusetts Institute of Technology Press, 2000.
-  Cherubini, U., Della Lunga, G., *Matematica Finanziaria*, McGraw-Hill, 2002.
-  Hull, J., *Options, Futures & Other Derivatives*, Prentice-Hall, 1999.
-  Khandani, A.E., Lo, A.W., *What happened to the quants in August 2007?*, Working paper, SSRN, 2007.
-  Vanzini, R., *Rischio-rendimento degli strumenti finanziari, asset allocation e valutazione delle performance*, Aracne Editrice, 2006.
-  Vanzini, R., **Modelli finanziari su Excel: appunti per il Master in Corporate Finance & Investment Banking**, Working paper, 2008.